Chapitre 15

Primitives et Intégrales

I Primitives :

1) Généralités :

a) Définition :

Définition 1

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. On appelle primitive de f sur I toute fonction F, dérivable sur I avec, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f$.

Exemples :

- $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de sur $\mathbb{R}$,
- $x \to \arctan(x)$ est une primitive de sur $\mathbb{R}$

b) Existence des primitives

Théorème 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet une infinité de primitives sur I qui diffèrent d'une constante additive.
Plus précisément, en notant F une des primitives, toutes les primitives de f sont de la forme suivante

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in I, x \mapsto F(x) + C$$

▷ *Preuve :* On admet l'existence

◁

Exemple :

La fonction $x \to \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Elle admet donc une primitive. Elle en admet même une infinité, et celle que l'on appelle ln est l'unique qui s'annule en 1.

Piège :
Ce théorème parle de primitives uniquement sur des intervalles, bien qu'on puisse parler de primitive pour sur des ensembles quelconque (dans la définition, il n'est pas dit que I est un intervalle).

Par exemple, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est également continue sur $]-\infty, 0[$, mais ln est une primitive sur $]0, +\infty[$ uniquement.
Sur $]-\infty, 0[$, on peut remarquer que $x \mapsto \ln(-x)$ est une primitive.

Astuce... *Primitive de* $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

On peut retenir qu'une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ est la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$.

c) Linéarité

Comme la dérivation est linéaire, la "primitivation" l'est également :

Propriété 1

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, admettant comme primitive respectivement F et G. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors une primitive de $\alpha f + \beta g$ est $\alpha F + \beta G$.

▷ *Preuve :* Immédiat car $(\alpha F + \beta G)' = \alpha f + \beta g$ ◁

2) Methode élémentaire : reconnaitre ou faire apparaître des dérivées

a) Principe :

C'est la première chose à essayer : si on reconnait F tel que $F' = f$, alors on a directement une primitive.

Exemple :
Une primitive de $x \mapsto 2x$ est

Méthode : *Faire apparaitre une forme connue*

Il arrive qu'on aie "presque" la dérivée d'une fonction connue.
Dans ce cas, on multiplie et on divise PAR UNE CONSTANTE pour faire apparaître la forme voulue.

cela fonctionne uniquement en manipulant des constantes. Si il manque des "choses avec des x", l'opération ne fonctionnera pas.

Exemple :
On veut une primitive de $x \mapsto \cos(2x)$: on reconnait presque la dérivée de $\sin(2x)$. "Presque" parce qu'il manque un 2.
Le plus prudent est de le faire apparaître avant de donner la primitive :

Formulaire *Quelques motifs à savoir reconnaitre*

Soit u une fonction dérivable.

expression	Primitive (à une constante près)
$u'u^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln \lvert u \rvert$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{u^n}$ (avec $n \geq 2$)	$\frac{-1}{u^{n-1}} \times \frac{1}{n-1}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$
$u'u^\alpha$avec $\alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u$
$u'\cos(u)$	$\sin(u)$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u)$
$u'f'(u)$	$f(u)$

b) Exemples :

1. Donner une primitive de $x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$:

2. Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{x+1}{(x^2+2x+1)^2}dx$.

3. Trouver une primitive à $f : x \to \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ qui s'annule en 0.

Astuce... *Quelques conseils pratiques*

1. Connaître parfaitement vos dérivées usuelles pour ne pas risquer de confondre... Bien savoir dériver est la clef pour bien savoir "primitiver"...
2. Vérifier rapidement que la primitive que vous avez obtenu a bien pour dérivée ce que vous souhaitez...

II Intégration de fonctions continues sur un intervalle

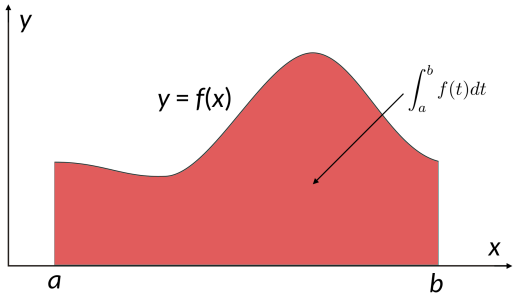
1) Définition à partir de l'aire :

a) Cas des fonctions positives

Définition 2

Soit f une fonction positive et continue sur un intervalle I. Soit $a, b \in I$ avec $a \leq b$.
On appelle "intégrale de f entre a et b" l'aire de la zone comprise entre la courbe d'équation $y = f(x)$, et les droites d'équations $y = 0$, $x = a$ et $x = b$ et on note

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(t)dt$$



b) Cas des fonctions quelconques

Si $f \leq 0$, alors $-f$ est positive, et on définit de même sur $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx$ comme étant l'opposé de l'aire définie ci dessus.
Si on veut retrouver l'aire pour une fonction f sans connaitre son signe, on peut retenir la formule

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|dx}$$

2) A partir de la primitive :

a) Aire vers primitive :

Théorème 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et soit $a \in I$.
Alors la fonction F définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f.
De plus c'est l'unique primitive qui s'annule en a (i.e. $F(a) = 0$).

▷ *Preuve :*
on admet. (cf Annexe pour la preuve). ◁

Corollaire 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a et b dans I.
Soit F une primitive de f sur I.
Alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

▷ *Preuve :*

◁

Remarques

1. Par soucis de "compacité" des écritures, on utilisera souvent la notation
$$\big[F(t)\big]_a^b = F(b) - F(a)$$
2. La variable t est appelée "variable d'intégration". C'est une variable muette (= qu'on peut appeler comme on veut) qui n'existe que dans le signe $\int$.
Ainsi, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(\theta)d\theta$.

b) Propriétés immédiates :

Propriété 2

A partir de la version avec primitive, on montre très facilement que, pour f continue sur un intervalle I , pour tout $a, b, c \in I$

1. $\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$
2. $\int_a^a f(t)dt = 0$
3. *Relation de Chasles :*
$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$

Remarque :
La relation de Chasles ne demande pas que $a \leq c \leq b$: il suffit juste d'avoir a,b et c dans l'intervalle I.

3) Intégrale et opérations

a) Linéarité :

Propriété 3

Soient f et g deux fonctions continues sur I, soient $a, b \in I$.

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

▷ *Preuve :* Immédiat en utilisant la formule avec les primitives et grâce à la linéarité de la dérivée. ◁

b) Positivité et inégalité :

Proposition 1

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$. Soit f définie et continue sur $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

On dit que l'intégrale est "positive"

▷ *Preuve :*

◁

Remarques :



La réciproque est fausse : ce n'est pas parce que l'intégrale est positive que la fonction que l'ont intègre l'est.

Par exemple $\int_0^2 x^2 - 1 dx = \frac{8}{3} - 2 \geq 0$ mais $x^2 - 1 \leq 0$ pour $x \in [0, 1]$.



Attention à bien avoir $a \leq b$. Si c'est dans l'autre sens, l'intégrale devient négative...



C'est une proposition utile pour vérifier vos calculs : si on sait que la fonction que l'on regarde est positive, l'intégrale de a à b avec $a \leq b$ doit être positive, sinon il y a un problème....

Corollaire 2 (*"croissance de l'intégrale"*)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$. Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

▷ *Preuve :* On applique le résultat précédent à $g-f$. Comme $g-f \geq 0$, alors $\int_a^b g-f \geq 0$ et par linéarité $\int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$. ◁

Toujours à la suite de ce résultat, on obtient une sorte d'inégalité triangulaire pour les intégrales :

Corollaire 3 (*Inégalité de Jensen*)

si $a \leq b$, alors $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

▷ *Preuve :*

◁

c) Intégrale et fonctions nulles

Proposition 2

Soit f une fonction continue ***positive*** *sur $[a,b]$.*
Si $\int_a^b f(t)dt = 0$, *alors $f = 0$ sur $[a,b]$.*

▷ *Preuve :*

◁

III Calcul d'intégrales : deux techniques utiles

Avant tout, on essaiera toujours de déterminer une primitive afin d'appliquer la formule $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$. Si cela n'est pas possible, on dispose des deux outils ci dessous :

1) Intégration par partie :

a) Le théorème

Théorème 3

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et soit $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

En abrégé : $\int uv' = [uv] - \int u'v$

▷ *Preuve :* ◁

b) Exemples :

1. Calculez $\int_0^1 xe^x dx$:

2. Donnez une primitive à $x \mapsto \ln x$:

c) Cas typiques d'utilisation :

Expression sous forme d'un produit avec un facteur qui se simplifie si on le dérive..
Intégration de quelque chose dont on connait la dérivée...

2) Changement de variable

a) Le théorème :

Théorème 4

Soit f continue sur un intervalle I et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J tel que $\varphi(J) \subset I$.
Alors pour tout $a, b \in J$,

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable "$u = \varphi(x)$".

▷ *Preuve* : Soit F une primitive de f sur I.
Comme φ est $\mathcal{C}^1$ sur J, $F \circ \varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur J par composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \times \varphi' = (f \circ \varphi) \times \varphi'$ est continue, donc l'intégrale existe, et $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi) \times \varphi'$.
Donc

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = [F(\varphi(x))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$$

◁

b) En pratique : description de la méthode

Le mieux est de voir sur des exemples.
Exemple : à calculer $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^{-x}+e^x}dx$ en posant $u = e^x$.
On applique le théorème de changement de variable avec $\varphi : x \mapsto e^x$, qui est bien une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Première technique : faire apparaitre du
Première étape : Calculer du et préparer l'intégrale :

Deuxième étape : calcul des bornes : quand $x = a$ que vaut u ? Et quand $x = b$ que vaut u ?

Troisième étape : on remplace tout : il ne doit plus y avoir de x dans l'expression, et les bornes sont changées. Attention : on ne les inverse pas même si à l'arrivée l'ordre peut sembler perturbé...

Deuxième technique : inverser le changement de variable.
On veut poser $u = e^x$, donc $x = \ln(u)$.
Première étape : calculer dx en fonction de du

Deuxième étape : calcul des bornes : quand $x = a$ que vaut u ? Et quand $x = b$ que vaut u ?

Troisième étape : on remplace tout !

c) Quelques exemples :

1. $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}dx$ en posant $u = \sqrt{1+x}$.

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+e^t)}{1+e^{-t}}dt$ en posant $u = 1+e^t$

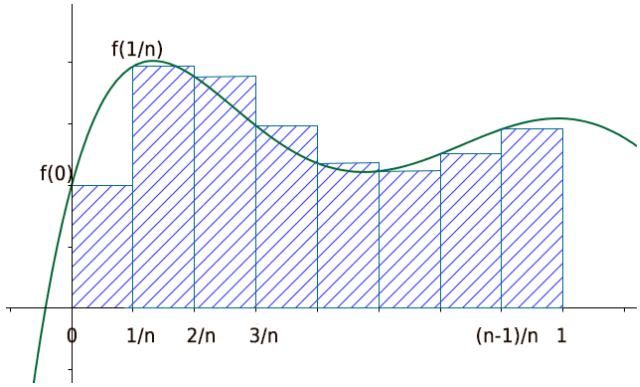


Au secours ! *Mais comment je sais ce que je dois poser ?*
Les changements de variables compliqués seront toujours indiqués. Il s'agit souvent de poser comme u le "truc" qui gène : un exponentiel, un ln, une racine, etc...

IV Approximation : methode des rectangles

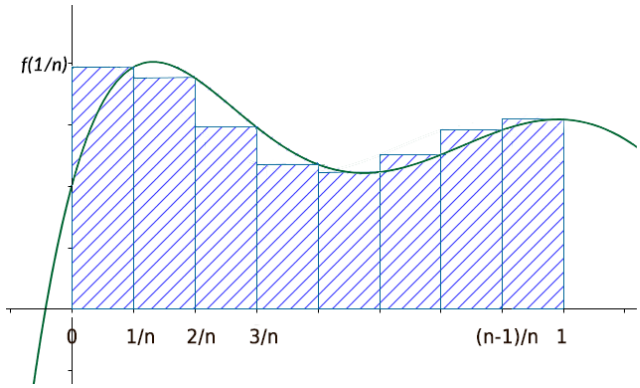
1) Théorème de convergence des sommes de Riemann

Principe :
On effectue une subdivision de l'intervalle $[0,1]$ en n parties égales. On approche alors l'intégrale avec l'aire des rectangles dont la hauteur est l'image de la borne gauche de l'intervalle de subdivision. Ainsi, le premier rectangle est de hauteur $f(0)$, le deuxième $f(\frac{1}{n})$, et ainsi de suite. Tous sont de largeur $1/n$



Aire totale des rectangles : $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Pour n grand, les rectangles sont de plus en plus fin et cette aire est proche de la valeur de l'intégrale.
On peut de la même façon prendre les rectangles dont la hauteur est l'image de la borne droite de l'intervalle :



Aire totale des rectangles : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Et à nouveau, pour n grand, cette aire est proche de la valeur de l'intégrale.

Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème 5 (*Théorème de convergence des sommes de Riemann*)

Soit f continue sur $[0,1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$$

▷ *Preuve* : Admis. ◁

Généralisation :
Si f est continue sur $[a,b]$, on peut généraliser avec la formule dite de Riemann-Darboux (hors programme) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

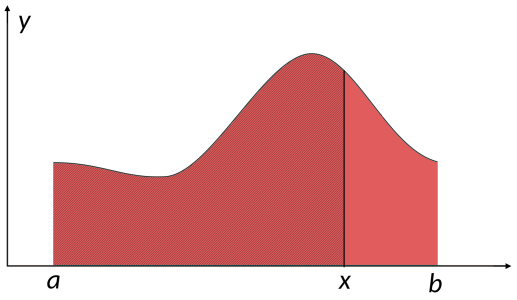
2) Exemple :

Le théorème de convergence des sommes de Riemann est très pratique pour calculer certaines limites sommes particulières :

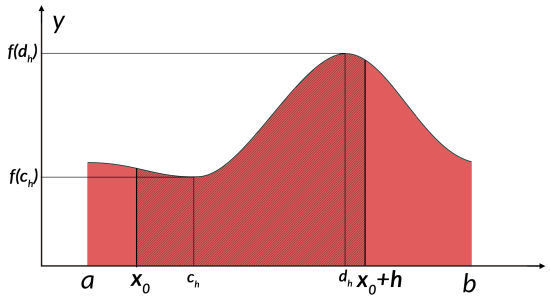
Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$

V Annexe

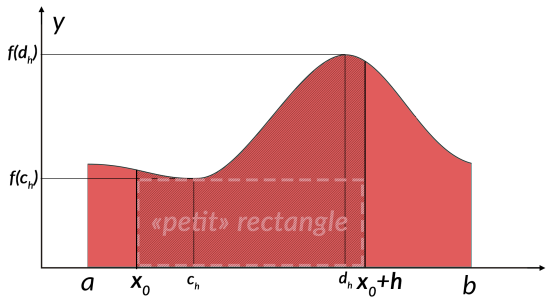
Preuve du lien aire et intégrale (p4)
Soit $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction telle que $A(x)$ est l'aire hachuré ci dessous :

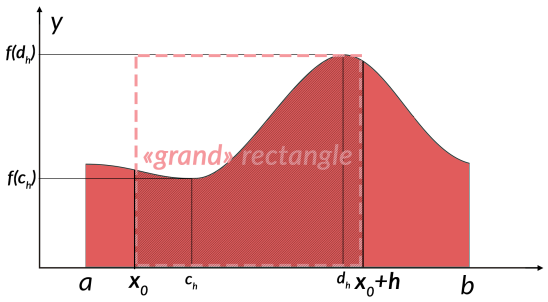


Autrement dit $A(x) = \int_a^x f(t)dt$.
On a $A(a) = 0$, $A(b) = \int_a^b f(t)dt$ et on va montrer que que $x \mapsto A(x)$ est une primitive de f.
Soit $x_0 \in [a, b[$ et $h > 0$ tel que $x_0 + h \leq b$. Sur $[x_0, x_0 + h]$, f est continue, donc elle est bornée et atteint ses bornes.
Il existe donc $c_h \in [x_0, x_0 + h]$ tel que $f(c_h) = \min_{[x_0, x_0+h]} f$ et $d_h \in [x_0, x_0 + h]$ tel que $f(d_h) = \max_{[x_0, x_0+h]} f$.
On a alors $A(x_0 + h) - A(x_0)$ qui est l'aire de la zone hachurée ci dessous :



Cette aire est encadrée par l'aire de deux rectangles :





Ainsi on a

$$\underbrace{f(c_h)h}_{\text{aire petit rectangle}} \leq A(x_0 + h) - A(x_0) \leq \underbrace{f(d_h)h}_{\text{aire grand rectangle}}$$

Donc

$$f(c_h) \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(d_h)$$

Comme c_h et d_h sont dans $[x_0, x_0 + h]$, on a $\lim_{h\to 0} c_h = x_0$ et $\lim_{h\to 0} d_h = x_0$.
Ainsi, par continuité de f, $\lim_{h\to 0^+} f(c_h) = f(x_0)$, $\lim_{h\to 0^+} f(d_h) = f(x_0)$ et donc, par encadrement,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Autrement dit, A est dérivable à droite avec $A'_d(x_0) = f(x_0)$.
On procède de même pour montrer que $A'_g(x_0) = f(x_0)$, et ainsi $A' = f$.
Donc la fonction A est une primitive de f.